Бином Ньютона

На клетчатой плоскости рассмотрим пути, соединяющие узлы сетки и состоящие из «шагов» двух видов: $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ и $(x, y) \mapsto (x+1, y+1)$. Для любых целых чисел $n, k \geqslant 0$ *биномиальным коэффициентом* C_n^k называется количество всевозможных путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, k). Альтернативное обозначение: $C_n^k = \binom{n}{m}$.

1. Докажите тождество $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.
2. Докажите, что число C_n^k равно количеству способов выбрать k элементов в n-элементном подмножестве.
3. **Бином Ньютона**. Докажите тождество
$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$
4. Докажите равенство $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, где, $a! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot a$ и $0! = 1$.
5. Докажите следующие тождества, используя как можно больше разных точек зрения на биномиальные коэффициенты:
   (a) $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$;
   (b) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
   (c) $C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$;
   (d) $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^i C_m^{k-i} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$;
   (e) $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.
6. Докажите тождества:
   (a) $C_n^0 C_n^m - C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + C_n^2 C_{n-2}^{m-2} - \ldots + (-1)^m C_n^m C_{n-m}^0 = 0$ при $1 \leqslant m \leqslant n$;
   (b) $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \frac{1}{4} C_n^3 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;
   (c) $C_n^0 - \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 - \frac{1}{4} C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1}$.

Диаграмма Юнга – это клетчатая фигура, выровненная по левой границе, в которой длины строк неубывают сверху вниз.

7. Сколько различных диаграмм Юнга можно нарисовать в прямоугольнике $m \times n$ так, чтобы верхний угол диаграммы совпадал с верхним углом прямоугольника?
8. Натуральное число n разбивают на сумму нескольких не обязательно различных слагаемых. Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых считаются одинаковыми. Докажите, что способов это сделать так, что наибольшее слагаемое равно k, столько же, сколько же, сколько способов это сделать так, чтобы число слагаемых было равно k.
9. Сколько всего существует диаграмм Юнга с полупериметром n?